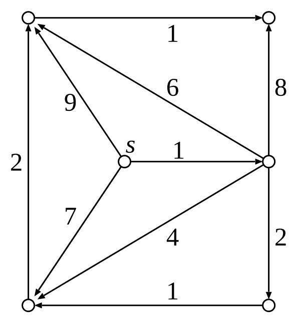
グラフ理論　試験問題　2004年7月

1. 以下のグラフに対し, ダイクストラ法によって s を始点とする最短路木を求めよ. 枝に付された数値は枝の長さである. 計算過程も計算途中のグラフを各反復ごとに描いて示すこと. その際,

   - 各節点に現在のラベル (講義ノートの g) を付す
   - 探索済みの節点を黒く塗る
   - 有限のラベルがついている節点に対して現在のラベルの原因となった節点 (講義ノートの pre) からの枝を太く描く

   などの工夫をして, アルゴリズムの動作（を理解していること）がよく分かるようにすること.



2. 単純無向グラフ $G = (V, A)$ の 2 連結性に関する次の性質を証明せよ.

   2 連結成分 $G_i = (V_i, A_i)$ と $G_j = (V_j, A_j)$ に対し, $i \neq j$ かつ $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ ならば, $V_i \cap V_j$ はただ一つの節点 (関節点) を持つ.

   念のため, 2 連結性に関する定義を与えておく. 同値関係 R_2

   $aR_2b \iff a$ と b が同じ枝であるか, または, a と b を通る単純閉路が存在

   は枝集合 A を同値類 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ に分割する. A_i に含まれる枝の端点の集合を V_i と記し, $G_i = (V_i, A_i)$ を 2 連結成分と呼ぶ.

3. 有向ネットワークの最大フロー問題を考える.

   (a) フロー追加路の中で枝数最小のものを見つけるにはどうすればよいか. アルゴリズムの概略を述べよ.

   (b) 枝数最小のフロー追加路に沿ってフローを修正した後の残余ネットワークでは, フローを修正する前の残余ネットワークに比べ, フロー追加路の枝数の最小値は非減少であることを示せ. （**ヒント.** 残余ネットワークにおいて, 始点から各節点への有向路の最小枝数（すなわち枝の長さを全て 1 としたときの最短路長）を考え, それが 1 のものを深さ 1 に, 2 のものを深さ 2 に, というように階層状に描いてみよ.）

4. 講義や試験問題に対する意見・感想などを自由に書いてください.