グラフ理論　　試験問題　　　2002年7月

1. n 節点と m 枝を持つ非巡回有向グラフ $G = (V, A)$ を考える. このとき, 全節点に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ のように番号を付し, 各枝 $(v_i, v_j) \in A$ が $i < j$ をみたすようにできる. このような番号づけを行う $O(n+m)$ 時間アルゴリズムを構成せよ. (注: もちろん, 単にアルゴリズムを示すだけでなく, その計算時間の解析, および正当性の説明が求められている. なお, $O(n+m)$ 時間のアルゴリズムを思いつかなかった場合でも, 正しい番号づけを行う多項式時間アルゴリズム (すなわち適当な定数 k と l に対して計算時間が $O(n^k m^l)$ でおさえられるもの) であれば採点の対象とするので, あきらめずに解答すること.)

2. 最大フロー・最小カットの定理とはどのようなものかを述べ, その正当性を証明せよ.

3. 無向グラフ $G = (V, A)$ と枝長 $d(u, v)$ (≥ 0) $\forall (u, v) \in A$ と始点 $v_0 \in V$ が与えられたとする.

   (a) v_0 からの最短路木を求める Dijkstra のアルゴリズムと, 同じグラフに対する最小木を求める Prim の方法の二つを考える. それぞれのアルゴリズムの概略を述べたのち, 類似点と相違点を説明せよ.

   (b) 最短路木と最小木が必ずしも一致しないことを具体例を用いて示せ. グラフの節点数は 5 以下とすること.

   (注: 講義では Dijkstra 法は有向グラフに対して説明したが, 無向グラフに対しても同様に適用できる.)

4. 講義や試験問題に対する意見・感想などを自由に書いてください. (配点あり. ただし, 厳しいコメントを減点の対象とすることはない.)