

# Ford-Fulkerson の増大路法の 無限反復する例について\*

伊藤大雄 永持 仁

京都大学情報学研究科

{itohiro,nag}@i.kyoto-u.ac.jp

## 1 まえがき

最大流問題の古典的算法として Ford - Fulkerson の増大路法がある。蛇足とは思うが、概略を述べておく。

その時点で得られているフローに対し、あとどれだけ流せるかを（各枝におけるフローの押し戻しも含めて）表したネットワークである残余ネットワークを作成し、そこでパスを見付けて（増大路と呼ぶ）それに添ってフローをできる限り増加させる。この手順を、増大路が無くなるまで繰り返す。

フローが最大流で無いならば、必ず増大路が存在することが証明できる。さらに全ての容量が整数ならば、増大路法で得られるフローは常に整数流なので、この場合は上記ステップを高々最大流量回繰り返せば最大流を得ることができる。

しかし、増大路の選び方を無作為に行ったとすると、容量が実数の場合には、無限回の繰り返しが必要となりしかも最大流に収束しない様な例が存在することが Ford と Fulkerson 自身によって示されている（ただし増大路を適切に選べば実数容量に対しても多項式時間算法を得ることができる）。その様な例が存在することは初めてフローアルゴリズムを学ぶ学生によく聞かせるものだが、手元に例が無いとなかなか空で思い出して書き下すわけにはいかない。

我々はこの無限繰り返しの例として、これまで知られているものよりも簡単なものを構成することができたのでここに紹介する。そしてこの結果次を得た。

命題 1 Ford-Fulkerson の増大路法は、増大路の選択が無作為の場合、グラフが平面グラフであり、かつ容量が1本の枝を除いて全て整数であっても、無限回繰り返しを行いしかも最大流に収束しない様な場合がある。

なお、最大流問題の基本用語については特に説明しないので、必要な場合は適当な教科書（例えば [2] 等）を参照されたい。

## 2 Ford-Fulkerson の例と Korte-Vygen の例

Ford-Fulkerson の与えた例は、彼等の著作 [3] の 21 ページに紹介されている。そのネットワークは Figure 1 である。図では無向枝で表現されているが、これは両方向に枝がある

\*本稿は文献 [1] の改定版である。なお、文献 [2, pp. 171–173] にも同様の記事が記載されている。

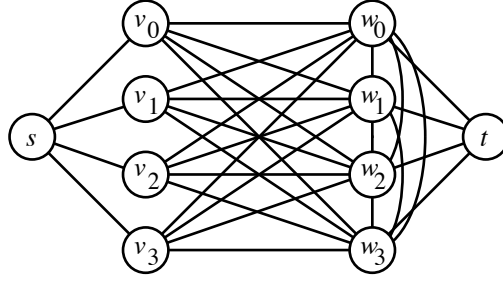


Figure 1: Ford-Fulkerson の例

ことを表している。容量は

$$\text{cap}(v_0, w_0) = 1, \quad \text{cap}(v_1, w_1) = \sigma, \quad \text{cap}(v_2, w_2) = \text{cap}(v_3, w_3) = \sigma^2$$

であり、その他の枝の容量は  $S$  である。ただし、

$$\sigma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad S = \frac{1}{1 - \sigma}$$

とする。なお  $(v_i, w_i)$ ,  $(0 \leq i \leq 3)$  の 4 本の枝を特別枝と呼び、 $a_i$  とも表すことにする。Korte と Vygen は、この問題例から  $(w_i, w_j)$  の枝  $3 \times 4 = 12$  本を取り除いても良いところに気付き、著書 [4] の 176–177 ページで紹介している。

Ford-Fulkerson の問題例の最大流量は明らかに  $4S$  であり、最短の増大路を見つけていけばわずか 4 回の繰り返しで最大流に到達する。しかし増大路の選択を間違えると、無限回繰返しても収束値が最大流に届かないことになる。それを以下に示す。なお、任意の  $k$  に対して

$$\sigma^k - \sigma^{k+1} = \sigma^{k+2}$$

であり、しかも

$$S = \sum_{i=0}^{+\infty} \sigma^i$$

であることに注意されたい。

**Step 1:**  $\langle s, v_0, w_0, t \rangle$  を増大路として選ぶ。増大量は 1 になる。その結果、特別枝  $a_0, a_1, a_2, a_3$  の残余容量はそれぞれ  $0, \sigma, \sigma^2, \sigma^2$  となる。

**Step  $2k - 1$  ( $k \geq 1$ ):** 特別枝  $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3$  ( $\langle a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 \rangle$  は  $\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$  の順列) の容量がそれぞれ  $0, \sigma^k, \sigma^{k+1}, \sigma^{k+1}$  とする。ここで増大路を  $\langle s, v'_1, w'_1, v'_2, w'_2, t \rangle$  の様を選べば、増大量は  $\sigma^{k+1}$  であり、特別枝  $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3$  の残余容量はそれぞれ  $0, \sigma^k - \sigma^{k+1} = \sigma^{k+2}, 0, \sigma^{k+1}$  となる。

**Step  $2k$  ( $k \geq 1$ ):** 次に増大路を  $\langle s, v'_1, w'_1, w'_0, v'_0, w'_2, v'_2, w'_3, t \rangle$  の様を選べば、増大量は  $\sigma^{k+2}$  であり、特別枝  $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3$  の残余容量はそれぞれ  $\sigma^{k+2}, 0, \sigma^{k+1}, \sigma^{k+2}$  となる。

Step  $2k - 1$  と  $2k$  での増大量の合計は  $\sigma^{k+1} + \sigma^{k+2} = \sigma^k$  であるので、結局 Step  $2k$  終了後のフロー  $f_k$  の流量は  $|f_k| = \sum_{i=0}^k \sigma^i$  となり、常に  $|f_k| < S$  である。結局、有限回のフロー増加では終わらず、しかも収束する値 ( $S$ ) は最大流の値 ( $4S$ ) より小さい。

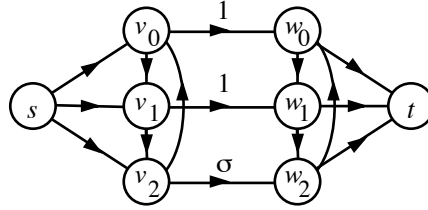


Figure 2: 新しい例

Korte と Vygen は著書内で具体的な無限回繰返しのフロー増大ステップを示していないので、真意は不明だが、Ford-Fulkerson の例と同じであろうことが推測される。実際 Ford-Fulkerson の例において、 $(w_i, w_j)$  の枝を使用する部分は Step  $2k$  における  $(w'_1, w'_0)$  だけであるが、ここで  $v'_3$  を経路すれば、この枝は使用せずに済む。Korte と Vygen はここに気が付いたのだと推測される。

しかしいずれにしても、この経路選択順を覚えておくには苦勞するだろう。(我々も暗記してはいない。)

### 3 より単純な例

我々は Ford-Fulkerson の例を改善することにより Figure 2 の例を得た。枝は全て有向枝である。容量を

$$\text{cap}(v_0, w_0) = \text{cap}(v_1, w_1) = 1, \quad \text{cap}(v_2, w_2) = \sigma$$

とし、その他の枝の容量は全て 2 としておく。この例でも枝  $(v_i, w_i)$  を特別枝と呼び、 $a_i$  とも表すことにする。

見て分る様に、このグラフは平面グラフであり、節点数、枝数ともに削減され、しかも両方向に枝を持つ節点間が無い (Figure 1 を両方向の有向枝で表記するとさらに雑然とするであろう)。さらに、整数容量を持たない枝が 1 本だけになっている。

改善点はそれだけでは無く、フローの増大ステップもより単純になっている。

**Step 1:**  $\langle s, v_1, w_1, t \rangle$  を増大路として選ぶ。増大量は 1 になる。その結果、特別枝  $a_0, a_1, a_2$  の残余容量はそれぞれ  $1 = \sigma^0, 0, \sigma$  となる。

**Step  $k+1$  ( $k \geq 1$ ):** 特別枝  $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}$  (ただし添字の整数値は全て 3 の剰余をとるものとする) の残余容量がそれぞれ  $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$  であるとする。このとき増大路を  $\langle s, v_{k-1}, w_{k-1}, w_k, v_k, v_{k+1}, w_{k+1}, t \rangle$  の様を選ぶと、増大量は  $\sigma^k$  となり、その結果  $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}$  の残余容量は  $\sigma^{k+1}, \sigma^k, 0$  となる。

Step  $k+1$  で常にフローは  $\sigma^k$  だけ増加するので、Step  $k+1$  終了後のフロー  $f_k$  の流量は  $|f_k| = \sum_{i=0}^k \sigma^i$  となり、常に  $|f_k| < S$  である。結局、有限回のフロー増加では終わらない<sup>1</sup>。

ここで見られる様に、以前の例では 2 回のステップの合計で  $\sigma^k$  だけ増加させていたのを、この例は 1 回のステップで直接達成している分、かなり分かりやすくなっている。その増大路の選び方も、「容量  $\sigma^{k-1}, \sigma^k$  の枝は順向きに、容量 0 の枝は逆向きに選ぶ」と記憶しておけば、思い出すのは難しく無いと思う。

<sup>1</sup> なお、この例では収束する値  $S$  は最大流の値に等しいが、最小カットをまたがるように枝 (例えば  $(v_0, w_1)$  など) を 1 本加えれば、最大流の値を収束値より大きくすることができる。

## 4 比較とまとめ

これら3つの例の節点数と枝数を比較してみたものが Table 1 である。特に枝数が劇的に減っていることが分る。

Table 1: 3つの例の節点数と枝数の比較

	節点数	枝数
Ford-Fulkerson	10	60
Korte-Vygen	10	48
Ito-Nagamochi	8	15

最後に、新しい例の利点をまとめておく。

1. 節点数と枝数が減少している。
2. 両方向に枝がある節点間が無い。
3. 平面グラフである。
4. 1本を除いて容量は全て整数である。
5. 1回のフロー増大で  $\sigma^k$  増加させている（これまでは2回の合計値）。

授業やゼミで披露していただければ幸いである。

## References

- [1] 伊藤大雄, 永持仁: Ford-Fulkerson の増大路法の無限反復する例について, LA シンポジウム会誌, 36, pp. 15–18 (2001).
- [2] 滝根哲哉, 伊藤大雄, 西尾章治郎: ネットワーク設計理論, 岩波講座 インターネット, 5, 岩波書店 (2001).
- [3] Ford, L. R., and Fulkerson, D. R.: *Flows in Networks*, Princeton University Press (1962).
- [4] Korte, B. and Vygen, J.: *Combinatorial Optimization*, Springer (2000).