情報基礎論第 2 演習問題解答例

小野 孝男

2007 年 5 月 10 日

1. 各関数について, 「オーダーが最も高い項はどれか」を考えればよい.
   (a) オーダーが最も高い項は $2n^3$ である ($logn$ はどんな多項式よりもオーダーが低いことに注意). $O(g(n))$ の形で表記するときには定数係数を消してよいので $O(n^3)$.
   (b) 同じく, 2^{n+2} の項が最もオーダーが高い. ここで $2^{n+2} = 2^2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n$ であり, この「4」は定数係数となるので答えは $O(2^n)$.
   (c) 最高次の項は $5n \log n$ であり ($\log n$ が掛っているので $7n$ よりもオーダーが高くなる), 従って $O(n \log n)$.
2. ユークリッドの互除法で計算すると
$$\begin{aligned} 51{,}911 &= 2 \cdot 23{,}119 + 5{,}673, \\ 23{,}119 &= 4 \cdot 5{,}673 + 427, \\ 5{,}673 &= 13 \cdot 427 + 122, \\ 427 &= 3 \cdot 122 + 61, \\ 122 &= 2 \cdot 61 \end{aligned}$$
   なので最大公約数は 61. ちなみに $51{,}911 = 23 \cdot 37 \cdot 61$, $23{,}119 = 61 \cdot 379$.
3. 辺の本数 m を 2 通りで数えるのが最も簡単. 葉である頂点の数を n_L, 葉でない頂点の数を n_I とする.
   (a) 葉でない頂点は 2 個の子を持ち, そのそれぞれに対して 1 本ずつ辺が存在する. 従って $e = 2n_I$.
   (b) 根でない頂点は 1 個の親を持ち, それに対する 1 本の辺が存在する. 従って $e = n_I + n_L - 1$.

   よって $2n_I = n_I + n_L - 1$ より $n_L = n_I + 1$.
4. 一例を図 1 に示す. もちろん, 数多くのオイラー閉路が存在する.
5. 「G の各頂点の次数が全て偶数」$\Longleftrightarrow$「G はオイラー閉路を持つ」を証明する.
   [$\Leftarrow$] G のオイラー閉路を C とする. この C に沿ってある頂点 v_0 から辺に赤と青の 2 色を赤から交互に塗ってゆく. v_0 以外の頂点 v については, 「赤の辺で入り青の辺で出てゆく」あるいは「青の辺で入り赤の辺で出てゆく」のいずれかであり, 従って v に接続する赤の辺と青の辺は同数でなければならない. つまり v の次数は偶数である. 一方, v_0

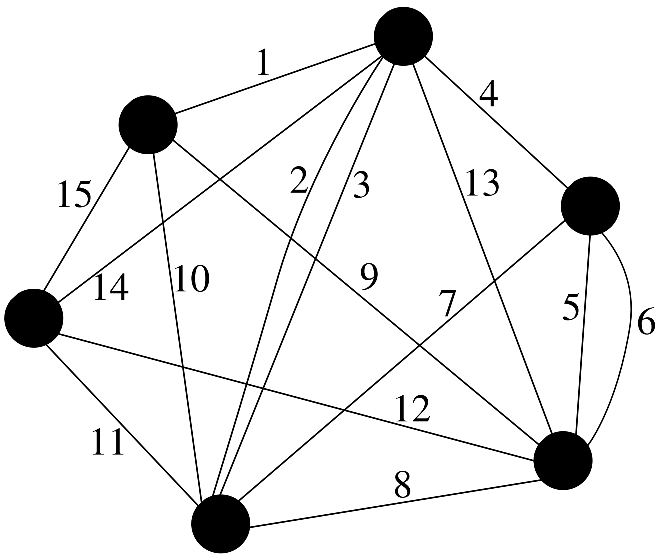

図 1　オイラー閉路の例

については最初と最後の辺を除くと, 他の頂点と同様「赤の辺で入り青の辺で出てゆく」あるいは「青の辺で入り赤の辺で出てゆく」のいずれかであり, これらの辺の総数は偶数となる. これらの辺に加えて「最初に出てゆく辺」と「最後に入る辺」の 2 本が加わるだけなので, v_0 の次数はやはり偶数である.

[⇒] 辺の本数に関する帰納法で証明する.

(a) 辺の本数は少なくとも 2 本であり, このとき G は「2 頂点とその間にある 2 本の辺」からなる. これは明らかにオイラー閉路を持つ.

(b) 辺が 3 本以上あるときには, まず G から単純閉路 C_0 を任意に選ぶ. これは, 任意の頂点から出発し, 「既に訪れたことのある頂点」を再度訪れるまで任意に辺をたどってゆけばよい. ここで G から C_0 に属する辺を取り除いたグラフ G' を考える. このグラフでも全ての頂点の次数は偶数である. G' の連結成分を $G_1, G_2, \ldots,$ G_k とおくとこれらは全て連結でかつ頂点の次数は偶数であり, しかも辺の本数は G より少ない. また, 各 G_i は必ず C_0 でたどった頂点を少なくとも 1 個は含んでいる (そうでなければ G が連結でない). そのような頂点を v_i とおく. 帰納法の仮定からこれらの連結成分はオイラー閉路を持つ. そこで, 次のような閉路を考える: 「閉路 C_0 をたどりながら, その途中で頂点 v_i にたどりついたら対応する連結成分 G_i のオイラー閉路をたどる」. このようにして得られる閉路 C は G の全ての辺を 1 度ずつ使っているのでオイラー閉路である.