平成 19 年度 アルゴリズム及び演習 期末試験解答

1. それぞれ以下の通りである:

$f_1(n)$: $O(n^2)$ (全ての項が n^k の形なので, k が最大の項をとればよい).

$f_2(n)$: $O(n)$ (任意の定数 $c > 0$ に対して $\log n = O(n^c)$ である. $c = 1/4$ ととれば $(\log n)^2\sqrt{n} = O(n^{2\cdot 1/4})n^{1/2}) = O(n)$.).

$f_3(n)$: $O((5/4)^n)$ (第 2 項は負なので無視する. 第 1 項は $(5/4)^{n-1} = (4/5)(5/4)^n$ で $4/5$ は定数だから $O((5/4)^n)$ と書ける).

$f_4(n)$: 正の項は第 1 項と第 2 項の 2 つ. $\log n$ が掛かっているので, n が大きいときには第 1 項が支配的となる. 従って $O(n\log n)$.

$f_5(n)$: 任意の定数 c に対し, $n!$ は c^n より真に大きい. 従って第 1 項が支配的となり, 定数係数を無視すると $O(n!)$.

f_2 と f_5 以外は問題ないと思うので, この 2 つだけ念の為に証明しておく.

命題 1. 任意の定数 $c > 0$ に対し $\log n = o(n^c)$.

証明. これは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^c} = 0$$

を示せば十分である. L'Hospital の定理を使えば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^c} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{cn^{c-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{cn^c} = 0.$$

□

命題 2. 定数 $c > 1$ に対し $c^n = o(n!)$.

証明. ここでも

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} = 0$$

を証明する. $n > 2c$ と仮定してよく, このとき

$$\begin{aligned}\frac{c^n}{n!} &= \frac{c^{2c}}{(2c)!}\cdot\frac{c^{n-2c}}{\prod_{i=2c+1}^{n} i} \le \frac{c^{2c}}{(2c)!}\cdot\frac{c^{n-2c}}{\prod_{i=2c+1}^{n}(2c)}\\ &= \frac{c^{2c}}{(2c)!}\cdot\frac{c^{n-2c}}{(2c)^{n-2c}} = \frac{c^{2c}}{(2c)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2c}\\ &= \frac{(2c)^{2c}}{(2c)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\end{aligned}$$

である. ここで $n\to\infty$ とすれば $(1/2)^n \to 0$ なので $c^n/n! \to 0$. □

2. それぞれ以下のようになる:

先行順: 「根 → 左部分木 → 右部分木」の順に頂点を訪れる. 今の場合では a が根でありその左部分木, 右部分木はそれぞれ b, c を根とする. つまり, 先行順では「$a \to b$ を根とする部分木 → c を根とする部分木」の順に頂点を訪れる. ここで, 「b を根とする部分木」, 「c を根とする部分木」の部分で訪れる順序を調べてゆくと, 最終的に「$a, b, d, g, h, e, i, c, f, j, k$」の順であることがわかる.

中間順:　「左部分木 → 根 → 右部分木」の順に頂点を訪れる. つまり, まず b を根とする部分木の頂点を全て訪れ, 次に根 a を訪れたあと最後に c を根とする部分木の頂点をたどる. 従って, 中間順では「$g, h, d, b, e, i, a, c, j, f, k$」の順に頂点を訪れる.

後行順:　後行順では, 「左部分木 → 右部分木 → 根」の順に頂点をたどる. 問題の 2 分木では「$g, h, d, i, e, b, j, k, f, c, a$」の順である.

3. 0 以上 n^3 未満の整数は, n **進** 3 **桁**とみなすことができる. そこで, 「n 進 3 桁」の n 個の整数を基数ソートによりソートする. 各桁ごとにバケットソートをしていると考えると, 必要な時間は

   - 桁数: 3
   - 各桁でのバケットソートの時間: $O(n + n) = O(n)$

   の積である. つまり基数ソート全体の実行時間は $3 \cdot O(n) = O(n)$ である.

4. まず, できあがる 2 分探索木は図 1 の通りである.

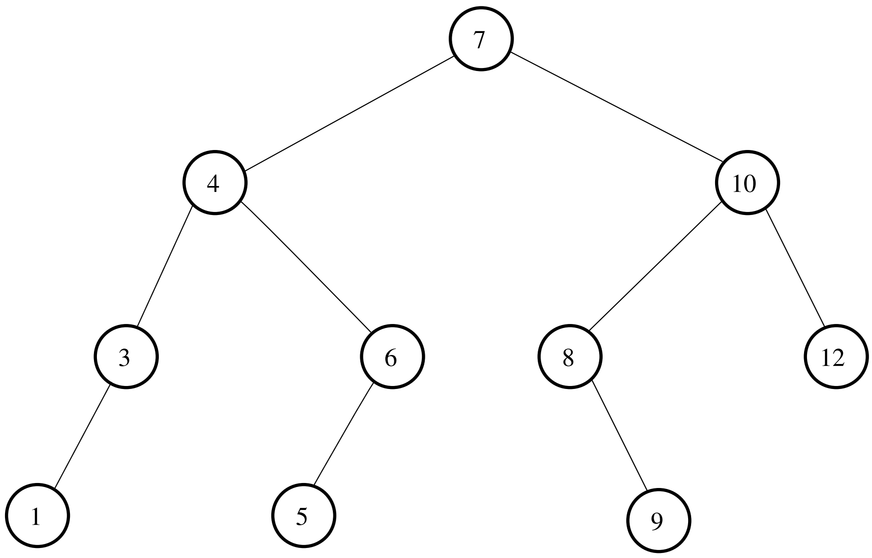

図 1: 問 4 で最終的に得られる 2 分探索木

   次に 2 色木であるが, ここでは「ある頂点とその兄弟の頂点がどちらも赤の色であれば色の交換 (両方の頂点の色を黒に変え, 親の色を赤とする) を行う」こととする.

   このとき, 2 色木は図 2 (a) → (p) のように変化し, 図 2 (p) が最終的に得られる 2 色木となる (図 3 に再掲).

5. 定義に従い計算する:

   (a) $f(1)$: 定義より 0 である.

   (b) $f(2)$: $i = 2$ なので max をとるべき u は 0 のみ. 従って $f(2) = 1 + 0 = 1$.

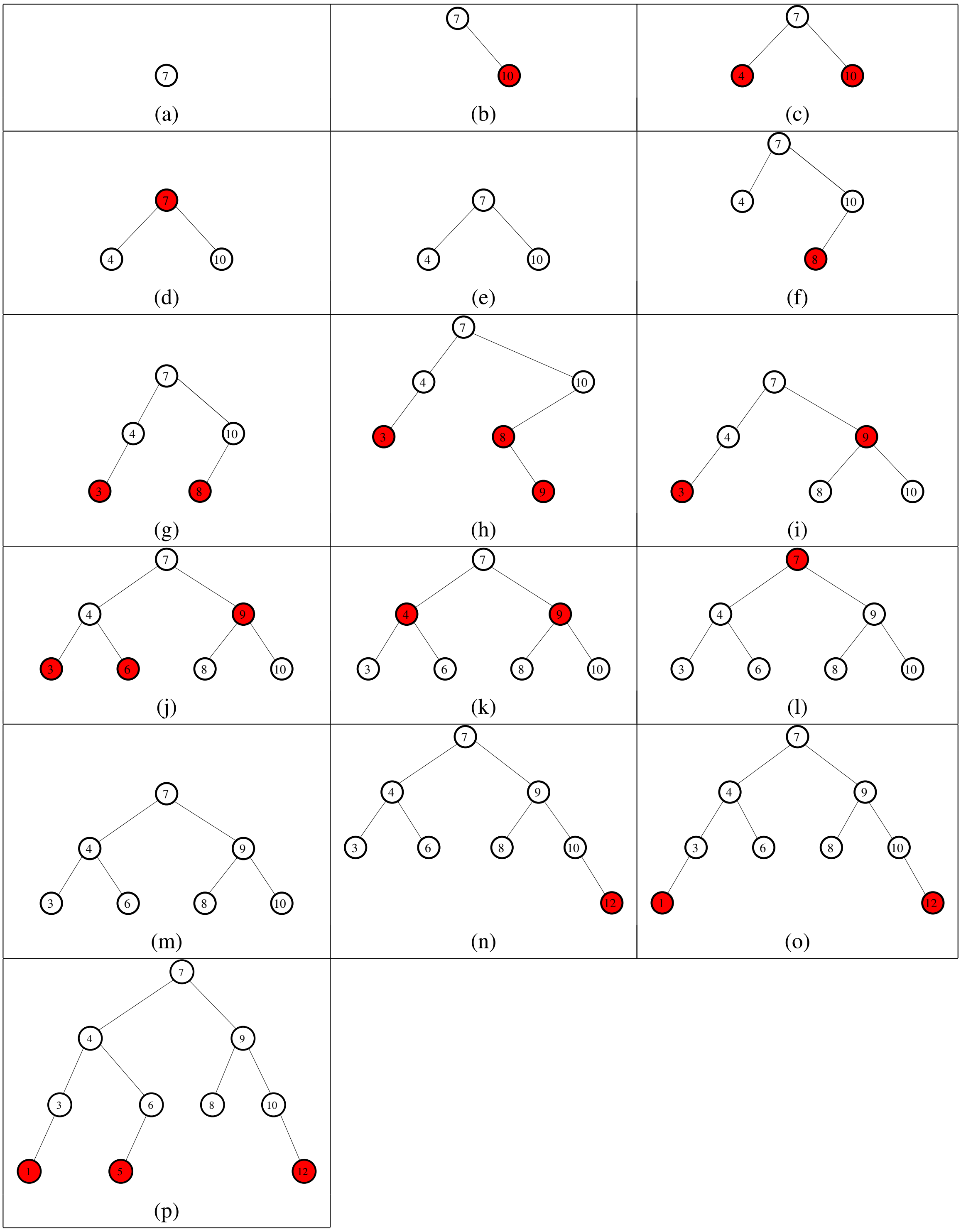

図 2: 問 4 における 2 色木の更新過程. (a) → (p) の順に変化してゆく.

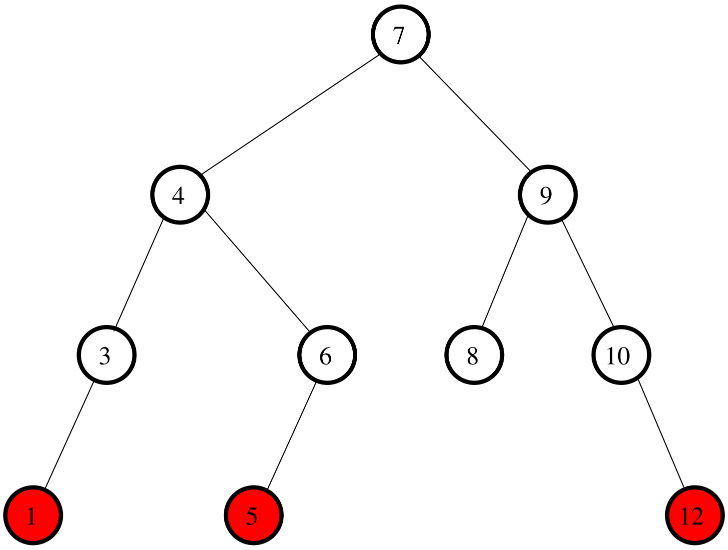

図 3: 問 4 で最終的に得られる 2 色木

(c) $f(3)$: $u = 1$ に対しては $p_1 = p_2$ という条件が得られるが, 今考えているパターン p においては $p_1 = a$, $p_2 = b$ である. つまり $p_1 \neq p_2$ なので $u = 1$ はとれず, $u = 0$ である. 従って $f(3) = 1 + 0 = 1$. $f(4)$ も同様に 1 となる.

(d) $f(5)$: $u = 3, 2$ は条件を満たさない. $u = 1$ のときは $p_1 = p_4$ という条件になるが, 今のパターン p では $p_1 = a$, $p_4 = a$ なのでこの条件が成り立つ. つまり max が 1 となるので $f(5) = 1 + 1 = 2$. 同様に $f(6) = 3$, $f(7) = 4$ である.

(e) $f(8)$: $u = 6, 5$ は条件を満たさないが, $u = 4$ に対する条件 $p_1p_2p_3p_4 = p_4p_5p_6p_7$ を満たす. 従って $f(8) = 1 + 4 = 5$.

まとめると表 1 のようになる.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	0	1	1	1	2	3	4	5

表 1: 失敗関数