アルゴリズム及び演習 第 2 回演習解答

小野 孝男*

2007 年 4 月 23 日

1. 頂点は n 個であるから, 頂点の対は $n(n-1)/2$ 個ある. この全ての対で辺が存在するときに辺の本数は最大であり, $n(n-1)/2$ 本である.
   一方, k 本の辺で連結にすることのできる頂点はたかだか $k+1$ 個 (k 本の辺が木を構成するとき. 閉路を含む場合には連結にすることのできる頂点数はより少なくなる) である. 今考えているグラフには n 個の頂点があり, これを全て連結しなければならないので少なくとも $n-1$ 本の辺が必要である.
2. 次のようになる:

先行順	$a, b, d,\ g, h, e,\ i, c, f,\ j, k$
中間順	$g, d, h,\ b, e, i,\ a, c, j,\ f, k$
後行順	$g, h, d,\ i, e, b,\ j, k, f,\ c, a$

3. 全頂点の次数の和を考える. 辺 $e=(u,v)$ は u, v のそれぞれの次数として 1 回ずつ数えられるので, 次数の和に対しては 2 だけ貢献する. つまり, 全頂点の次数の和は辺の本数の 2 倍であり, 必ず偶数となる. このことから, 次数が奇数である頂点は必ず偶数個である.
4. 木 T の高さを T の根 r の高さで定義し, ここでは $h(T)$ で表すことにする. また, T の外部路長, 内部路長及び頂点数をそれぞれ $L_e(T), L_i(T), n(T)$ とする. 命題を, $h(T)$ に関する帰納法で証明する.
   (a) $h(T)=0$ のとき. このとき T は根のみからなり, $n(T)=1$, $L_e(T)=L_i(T)=0$ である. よって $L_e(T)=0=L_i(T)+n-1$ より命題は成り立つ.
   (b) $h(T)<k$ で命題が成り立つと仮定する. $h(T)=k$ である木 T を考える. この木 T の根 r は 2 つの子を持ち, それらを根とする部分木を T_L, T_R とする. 明らかに $h(T_L) \leq k-1$. $h(T_R) \leq k-1$ なので帰納法の仮定を適用することができ, $L_e(T_L)=L_i(T_L)+n(T_L)-1$, $L_e(T_R)=L_i(T_R)+n(T_R)-1$ である. また, $n(T)=n(T_L)+n(T_R)+1$ である. T_L, T_R において葉は葉でない頂点よりちょうど 1 個だけ多いことから

$$\begin{aligned} L_e(T)-L_i(T) &= [L_e(T_L)-L_i(T_L)]+[L_e(T_R)-L_i(T_R)]+2 \\ &= [n(T_L)-1]+[n(T_R)-1]+2 \\ &= n(T_L)+n(T_R)=n(T)-1 \end{aligned}$$

   となる. つまり $L_e(T)=L_i(T)+n(T)-1$ となるので命題は成り立つ.

   以上から, 任意の根付き木 T に対して命題は成立する.
5. 図 1 を見る. 頂点 a から出る辺は 5 本であり, これらに赤または青の色を付けるわけだから少なくとも 3 本は同じ色になる. 対称性からどの頂点と結ぶ辺であってもかまわないので, ab, ac, ad が赤であると

* ono@is.nagoya-u.ac.jp

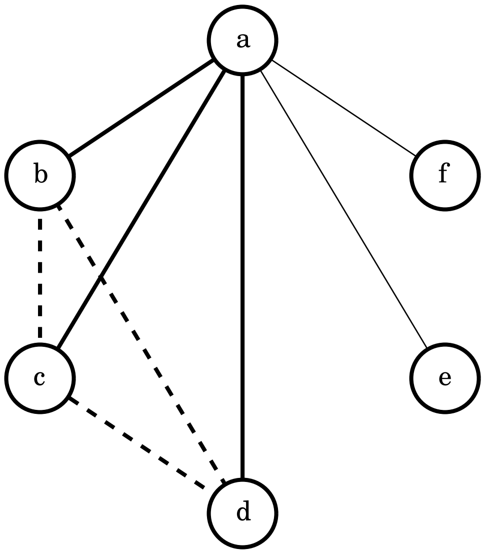

図 1　問題 5 の証明

仮定する (ae, af の色は問わない. また, ここでは赤の辺の方が多いと仮定しているが青の辺の方が多い場合でも赤と青の役割を入れ替えるだけで本質的には同じである). ここで 3 本の辺 bc, cd, db を考える. この 3 本のうち少なくとも 1 本の辺が赤であると仮定すると, 赤の辺だけからなる三角形が存在することになる (例えば bc が赤だとすると a, b, c は赤の辺だけからなる三角形である). 一方, この 3 本の辺が全て青であるとすると, b, c, d は青の辺だけからなる三角形である. つまり, いずれの場合においても全ての辺が同じ色であるような三角形が必ず存在する.