アルゴリズム及び演習 第 13 回演習解答

小野 孝男*

2007 年 7 月 23 日

1. 分割統治法で解くことを考えるので, 次のように考える:
   (a) 前半 $(x_1, \ldots, x_{n/2})$ に対して $s[i, j]$ の最大値を求める.
   (b) 後半 $(x_{n/2+1}, \ldots, x_n)$ に対して $s[i, j]$ の最大値を求める.
   (c) 前半と後半にまたがる区間に対する $s[i, j]$ の最大値を求める.
   (d) 3 つのうちの最大値を返す.

   (a) と (b) は, 大きさが半分のデータに対する問題そのものなので, 再帰的に解くことができる. (d) は 3 つの値の最大値を求めればよいので, これは簡単である. 従って, 考えなければならないのは (c) のみである.

   ここでは $1 \le i < n/2$ と $n/2 + 1 < j \le n$ に対する $s[i, j]$ の最大値が必要である. しかし, これは

   $$\max_{1\le i<n/2, n/2+1<j\le n} s[i, j] = \max_{1\le i<n/2} s[i, n/2] + \max_{n/2+1<j\le n} s[n/2 + 1, j] \tag{1}$$

   と計算することができる. 式 (1) において (左辺) $\le$ (右辺) はほとんど自明だろう. 逆に (左辺) $>$ (右辺) を仮定すると, 左辺の最大値を達成する i, j に対して $s[i, n/2] > \max_i s[i, n/2]$ と $s[n/2 + 1, j] > \max_j s[n/2 + 1, j]$ の少なくとも一方が成り立たなければならないが, これは矛盾である.

   つまり (c) は式 (1) の右辺で計算することができ, これは明らかに線形時間である. 従って, n 個のデータに対する $\max_{i,j} s[i, j]$ の計算時間を $T(n)$ とおくと次の漸化式が成り立つ:

   $$T(n) = 2T(n/2) + O(n).$$

   この解は $T(n) = O(n \log n)$ である.

* ono@is.nagoya-u.ac.jp

2. この問題に対するグリーディアルゴリズムでは, 可能な限り高額の貨幣から利用を考えることになる. つまり, $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1$ の順に調べてゆけばよい. アルゴリズムとしては次のようになる.

```
for (i = n; i > 0 && C != 0; --i) {
    requires (C / c[i]) of currency #i;
    C %= c[i];
}
```

3. 動的計画法で表を作る際に, 「最後に残る因子」がどこでわかれているかも記録しておけばよい. この問題例に対して表を作ると, (計算が正しければ) 表 1 のようになる. この表の (i, j) 要素は $M_i M_{i+1} \ldots M_j$ のサイズとコスト, それに「その計算をする際の, 最後の乗算で掛けられる因子」を表している. 例えば, $(1, 3)$ 要素は $M_1 M_2 M_3$ はサイズが 20×30 でその計算コストは 72 k であり, この計算は $M_1(M_2 M_3)$ と行うことを表している.

サイズ コスト 因子	20×20 0 —	20×100 40 k 1-2	20×30 72 k 1-23	20×50 102 k 123-4	20×20 110 k 1-2345
サイズ コスト 因子		20×100 0 —	20×30 60 k 2-3	20×50 90 k 23-4	20×20 102 k 23-45
サイズ コスト 因子			100×30 0 —	100×50 150 k 3-4	100×20 90 k 3-45
サイズ コスト 因子				30×50 0 —	30×20 30 k 4-5
サイズ コスト 因子					50×20 0 —

表 1　動的計画法で最適な乗算順序を求めるための表

表 1 の $(1, 5)$ 要素からたどっていくことにより, $M_1 M_2 \ldots M_5$ の計算コストは 110 k であり, これは $M_1[(M_2 M_3)(M_4 M_5)]$ と計算すれば得られることがわかる.